VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

FAKULTA STAVEBNÍ

MATEMATIKA I

MODUL BA01_M10, GA04_M04

REÁLNÁ FUNKCE DVOU A VÍCE PROMĚNNÝCH – II

STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

[0]Typeset by LaTeX 2_ε

© O. Dlouhý, V. Tryhuk, Brno 2004

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Cíle

V odpovídajících číselně vyjádřených odstavcích textu jsou stanoveny následující cíle:

2.1 Umět definovat lokální extrémy funkce dvou proměnných. Seznámit se s nutnými a postačujícími podmínkami pro existenci lokálních extrémů. Umět řešit úlohy s touto problematikou.

2.2 V tomto odstavci se seznámíte s funkcemi jedné a dvou proměnných, které jsou určené implicitně rovnicí a bodem. Je vhodné znát jednoduché příklady konkrétních funkcí určených implicitně. Na základě tvrzení o implicitních funkcích byste měli umět rozhodnout, zda je rovnicí a bodem určená funkce implicitně.

2.3 Zvládnout postupy při určování absolutních extrémů a jednoduchých vázáných extrémů, řešitelných snížením počtu nezávisle proměnných v zadané funkci za jedné zadané podmínky.

2.4 Tento odstavec patří k jednodušším. Po seznámení se s definicí hladké křivky a s konstrukcí tečného vektoru ke křivce vám již nebude dělat problémy určit rovnici tečny a normálové roviny k zadané křivce. Jde vlastně o využití známých poznatků z modulu věnovaného analytické geometrii v $\mathbb{E}_3$.

2.5 Umět odvodit normálový vektor tečné roviny plochy určené implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$. Pak již lehce určíte rovnici normály a tečné roviny. K tomu vám opět stačí poznatky z modulu analytické geometrie.

2.6 Po prostudování byste měli umět nalézt hladiny skalárního pole, určit gradient a směrovou derivaci.

1.2 Požadované znalosti

Pro potřeby zvládnutí tohoto modulu předpokládáme znalosti studentů v rozsahu modulu Matematika I, Moduly BA01_M04 , BA01_M05, BA01_M06, BA01_M09.

1.3 Doba potřebná ke studiu

Čas potřebný ke zvládnutí tohoto modulu je odhadnut pro *průměrného studenta* jako hodnota nejméně 20 hodin.

1.4 Klíčová slova

Lokální extrémy, implicitní funkce, absolutní extrémy, vázané extrémy, tečna křivky, normálová rovina křivky, tečná rovina plochy, normála plochy, skalární pole, hladina, gradient, směrová derivace.

Na konci modulu zařazen *Rejstřík*, ve kterém jsou další klíčová slova přehledně uspořádána i s odkazy na odpovídající stránky.

1.5 Metodický návod k práci s textem

Text je uspořádán podle stejných zásad, jako ostatní dříve studované moduly předmětu Matematika.

Kapitola 2

Funkce dvou a více proměnných

2.1 Lokální extrémy funkce dvou proměnných

V této kapitole se naučíme hledat lokální extrémy funkce dvou proměnných. Pojem lokálního extrému je opět definován podobným způsobem jako u funkce jedné proměnné.

Definice 2.1.1: *Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $[x_0, y_0] \in D(f)$ **lokální maximum**, když existuje prstencové okolí $\mathcal{P}(x_0, y_0)$ takové, že pro všechny body $[x, y] \in \mathcal{P}(x_0, y_0)$ platí podmínka $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$. Je-li v podmínce ostrá nerovnost $f(x, y) < f(x_0, y_0)$, hovoříme o **ostrém lokálním maximu** funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.*

△

Úloha: Definujte lokální minimum funkce $z = f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0] \in D(f)$.

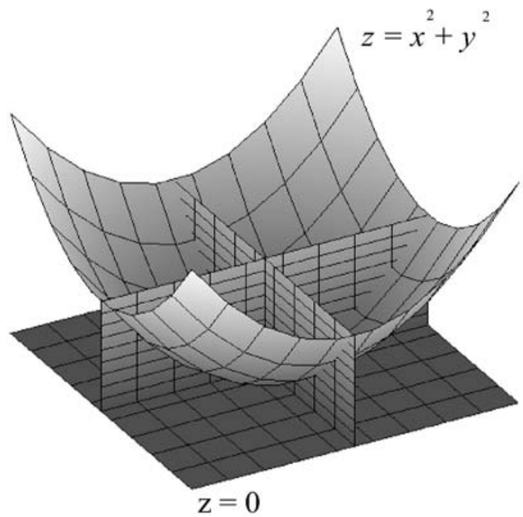
△

*Lokální maxima a lokální minima funkce souhrně nazýváme **lokálními extrémy funkce**.*

△

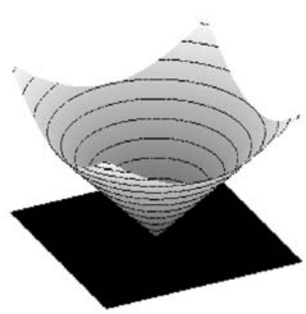
Pro hledání lokálních extrémů funkce dvou proměnných je užitečné znát tzv. *nutné a postačující podmínky pro existenci lokálního extrému v* $\mathbb{E}_2$. Začněme příklady jednoduchých funkcí.

a) Grafem funkce $z = x^2 + y^2 = f(x, y)$, $[x, y] \in \mathbb{E}_2$, je rotační paraboloid s osou rotace v ose z a vrcholem v počátku $[x_0, y_0] = [0, 0]$ souřadnicové soustavy, ve kterém je funkční hodnota $f(0, 0) = 0$. V libovolném bodě $[x, y] \in \mathcal{P}(0, 0)$ platí nerovnost $f(x, y) = x^2 + y^2 > 0 = f(0, 0)$, proto má funkce f v bodě $[0, 0]$ ostré lokální minimum. Dále, v bodě $[0, 0]$ existují parciální derivace $f'_x(x, y) = 2x$, $f'_y(x, y) = 2y$, které jsou rovny nule. Geometricky můžeme

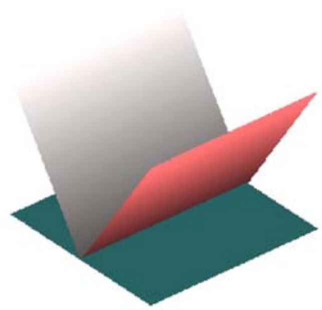


tuto skutečnost interpretovat takto: funkce $g(x) = f(x, y_0) = f(x, 0) = x^2$ má v bodě $x_0 = 0$ derivaci $g'(0) = f'_x(0,0) = 0$ a funkce $h(y) = f(x_0, y) = f(0, y) = y^2$ má v bodě $y_0 = 0$ derivaci $h'(0) = f'_y(0,0) = 0$. Grafem funkce g je průnik grafu funkce $y = f(x, y)$ s rovinou $y = 0 \,(= y_0)$ a grafem funkce h je průnik grafu funkce $y = f(x, y)$ s rovinou $x = 0 \,(= x_0)$. Není problémem se přesvědčit, že obě funkce mají v bodě 0 ostré lokální minimum. Doporučujeme čtenáři promyslet si proto i skutečnost, že existují druhé parciální derivace funkce f v bodě $[0, 0]$ a $f''_{xx}(0,0)$, $f''_{yy}(0,0)$ jsou kladné.

b) Grafem funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2} = f(x, y)$, $[x, y] \in \mathbb{E}_2$, je horní část rotačního kuželu s osou rotace v ose z a vrcholem v počátku $[x_0, y_0] = [0, 0]$ souřadnicové soustavy, ve kterém je funkční hodnota $f(0, 0) = 0$. V libovolném bodě $[x, y] \in \mathcal{P}(0, 0)$ platí nerovnost $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} > 0 = f(0, 0)$, proto má funkce f v bodě $[0, 0]$ ostré lokální minimum. Přitom parciální derivace $f'_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f'_y(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ v bodě $[0, 0]$ neexistují.



c) Grafem funkce $z = |y| = f(x, y)$, $[x, y] \in \mathbb{E}_2$, je plocha rovnoběžná s osou x. V každém bodě $[x_0, 0]$ ležícím na ose x je funkční hodnota $f(x_0, 0) = |0| = 0$. V okolí $\mathcal{P}(x_0, 0)$ takového bodu pak je $f(x, y) = |y| \geq 0 = f(x_0, 0)$ a funkce f má proto v bodě $[x_0, 0]$ lokální minimum, které není ostré. Parciální derivace $f'_x(x, y) = (|y|)'_x = 0$ v každém bodě definičního oboru funkce f, proto také v bodě $[x_0, 0]$. Parciální derivace $f'_y(x, y) = (|y|)'_y$ v bodě $[x_0, 0]$ neexistuje.



Definice 2.1.2: *Bod $A = [x_0, y_0] \in D(f)$ nazveme **stacionárním bodem funkce** f, jestliže v něm existují parciální derivace f'_x, f'_y a platí $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.*

△

Výše uvedené příklady podporují platnost *nutné podmínky* existence lokálního extrému.

Tvrzení: Nechť má funkce $z = f(x, y)$ v bodě $A = [x_0, y_0] \in D(f)$ lokální extrém. Pak je bod $[x_0, y_0]$ stacionárním bodem funkce f, nebo alespoň jedna z parciálních derivací $f'_x(A), f'_y(A)$ neexistuje.

Zabývejme se nyní tzv. *postačujícími podmínkami*, při jejichž splnění bude mít funkce f v bodě A například lokální minimum. Předpokládejme, že má funkce f v okolí $O(A)$ spojité parciální derivace druhého řádu. Z Taylorova polynomu dostaneme rovnost

$$f(X) = f(A) + \mathrm{d}f(A; \vec{u}) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(\tilde{A}; \vec{u}).$$

Protože A je stacionární bod, je $\mathrm{d}f(A; \vec{u}) = 0$ a tedy $f(X) - f(A) = \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(\tilde{A}; \vec{u})$.

Pokud $\mathrm{d}^2 f(\tilde{A}; \vec{u}) > 0$, pak je $f(X) > f(A)$ v nějakém okolí $O(A)$ a v bodě A nastává *lokální minimum*.

Zabývejme se proto znaménkem polynomu $\mathrm{d}^2 f(\tilde{A}; \vec{u}) = P(h, k)$.

- Pro $k \neq 0$ lze psát
$$P(h,k) = k^2 \cdot \left(f''_{xx}(\tilde{A}) \left(\frac{h}{k}\right)^2 + 2f''_{xy}(\tilde{A})\frac{h}{k} + f''_{yy}(\tilde{A}) \right).$$
Při označení $l = h/k$ můžeme místo znaménka polynomu $P(h,k)$ vyšetřovat znaménko polynomu
$$Q(l) = f''_{xx}(\tilde{A})l^2 + 2f''_{xy}(\tilde{A})l + f''_{yy}(\tilde{A}).$$
Je-li
$$4\left(f''_{xy}(\tilde{A})\right)^2 - 4f''_{xx}(\tilde{A})f''_{yy}(\tilde{A}) < 0,$$
(jde o diskriminant rovnice $Q(l) = 0$), pak musí být $f''_{xx}(\tilde{A}) \neq 0$ a současně
$$D_2(\tilde{A}) = f''_{xx}(\tilde{A})f''_{yy}(\tilde{A}) - \left(f''_{xy}(\tilde{A})\right)^2 > 0.$$
Polynom $Q(l)$ pak nebude měnit znaménko (má záporný diskriminant) a přitom
$$\lim_{l\to\infty} Q(l) =$$
$$= \lim_{l\to\infty} l^2 \left(f''_{xx}(\tilde{A}) + 2f''_{xy}(\tilde{A})\frac{1}{l} + f''_{yy}(\tilde{A})\frac{1}{l^2} \right) = \begin{cases} \infty \text{ pro} & f''_{xx}(\tilde{A}) > 0 \\ -\infty \text{ pro} & f''_{xx}(\tilde{A}) < 0 \end{cases}.$$
Je vidět, že znaménko polynomu $Q(l)$ je určeno znaménkem $f''_{xx}(\tilde{A})$.

- Pro $k = 0$ je $P(h,k) = P(h,0) = f''_{xx}(\tilde{A})h^2$ a tedy
$P(h,0) > 0$ pro $f''_{xx}(\tilde{A}) > 0$,
$P(h,0) < 0$ pro $f''_{xx}(\tilde{A}) < 0$.

Připomeňme si, že spojitost parciálních derivací druhého řádu v okolí bodu A má za následek spojitost funkce
$$D_2(X) = f''_{xx}(X)f''_{yy}(X) - \left(f''_{xy}(X)\right)^2.$$
Z poznámky k Bolzanově větě vyplývá existence okolí bodu A, v němž platí
$$\text{znaménko } D_2(X) = \text{znaménko } D_2(A), \ \text{znaménko } f''_{xx}(X) = \text{znaménko } f''_{xx}(A).$$
Docházíme k tomuto závěru: Předpokládáme-li, že $D_2(A) > 0$ a $f''_{xx}(A) > 0$, pak existuje okolí v němž také $D_2(\tilde{A}) > 0$ a $f''_{xx}(\tilde{A}) > 0$. Odtud vyplývá, že pak také $\mathrm{d}^2 f(\tilde{A};\vec{u}) = P(h,k) > 0$ pro všechna $h,k \in \mathbb{R}$ a tedy v bodě A nastává lokální minimum.

Tvrzení: Buď $A = [x_0, y_0]$ stacionárním bodem funkce $z = f(x, y)$ a nechť existují spojité parciální derivace druhého řádu funkce f v bodě A. Označme

$$D(X) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(X) & f''_{xy}(X) \\ f''_{xy}(X) & f''_{yy}(X) \end{vmatrix}$$

determinant vytvořený z parciálních derivací druhého řádu funkce f. Pak platí:

a) Je-li $D(A) > 0$, pak má funkce f v bodě A lokální extrém, a to

(ι) ostré lokální maximum, je-li $f''_{xx}(A) < 0$,

($\iota\iota$) ostré lokální minimum, je-li $f''_{xx}(A) > 0$.

b) Je-li $D(A) < 0$, pak nemá funkce f v bodě A lokální extrém.

c) Je-li $D(A) = 0$, pak funkce f v bodě A lokální extrém mít může, ale nemusí.

Příklad 2.1.1: Vyšetřete lokální extrémy funkce $f : z = x^2 + y^2 + 2x + 6y + 3$.

Řešení: Definičním oborem funkce f je $D(f) = \mathbb{E}_2$ a všude v $D(f)$ existují spojité parciální derivace prvního i druhého řádu funkce f. Platí $f'_x(x, y) = 2x+2$, $f'_y(x, y) = 2y + 6$ a pro stacionární body dostáváme systém rovnic

$$x + 1 = 0, \quad y + 3 = 0.$$

Vidíme, že existuje pouze jeden stacionární bod $S = [-1, -3] \in D(f)$, ve kterém může nastat lokální extrém funkce f. Druhé parciální derivace

$$f''_{xx}(x, y) = 2, \quad f''_{xy}(x, y) = 0, \quad f''_{yy}(x, y) = 2$$

jsou konstantní funkce a mají tedy stejné hodnoty i v bodě S. Determinant

$$D(S) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

proto má funkce f v bodě S lokální extrém, a to ostré lokální minimum s ohledem na skutečnost, že $f''_{xx}(S) = 2 > 0$. Zbývá stanovit funkční hodnotu $f(S) = f(-1, -3) = -7$ v bodě S ostrého lokálního minima funkce f.

Příklad 2.1.2: Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = (x-2y)e^{xy}$.

Řešení: Definičním oborem funkce f je $D(f) = \mathbb{E}_2$ a přitom existují v $D(f)$ spojité parciální derivace prvního i druhého řádu funkce f. Zejména

$$f'_x(x,y) = e^{xy}(xy - 2y^2 + 1), \quad f'_y(x,y) = e^{xy}(x^2 - 2xy - 2).$$

Stacionární body jsou dány podmínkami $f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$, tj. společným řešením systému nelineárních rovnic

$$xy - 2y^2 + 1 = 0, \quad x^2 - 2xy - 2 = 0.$$

Všimněme si, že v první rovnici musí být $y \neq 0$, abychom nedošli ke sporu $1 = 0$. Proto lze vyjářit

$$x = \frac{2y^2 - 1}{y}$$

a substitucí x do druhé rovnice získáváme rovnici

$$\frac{(2y^2-1)^2}{y^2} - 2\frac{2y^2-1}{y}y - 2 = 0,$$

která vede po úpravách na rovnici $y^2 = \frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2$ se dvěma řešeními $y_1 = \frac{1}{2}$ a $y_2 = -\frac{1}{2}$. Z podmínky $x = \frac{2y^2-1}{y}$ obdržíme $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ a existují proto dva stacionární body

$$S_1 = [-1, 1/2], \quad S_2 = [1, -1/2].$$

Vypočítáme nyní druhé parciální derivace a jejich funkční hodnoty ve stacionárních bodech:

$$\begin{array}{l|l|l}
f''_{xx}(x,y) = y(xy - 2y^2 + 2)e^{xy} & = \frac{1}{2}e^{-1/2} & = -\frac{1}{2}e^{-1/2}, \\
f''_{xy}(x,y) = (x^2y - 2xy^2 + 2x - 4y)e^{xy} & = -3e^{-1/2} & = 3e^{-1/2}, \\
f''_{yy}(x,y) = x(x^2 - 2xy - 4)e^{xy} & = 2e^{-1/2} & = -2e^{-1/2}. \\
 & {\scriptstyle S_1=[-1,1/2]} & {\scriptstyle S_2=[1,-1/2]}
\end{array}$$

Oba determinanty

$$D(S_1) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}e^{-1/2} & -3e^{-1/2} \\ -3e^{-1/2} & 2e^{-1/2} \end{vmatrix} = -8e^{-1}, \quad D(S_2) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}e^{-1/2} & 3e^{-1/2} \\ 3e^{-1/2} & -2e^{-1/2} \end{vmatrix} = -8e^{-1}$$

mají záporné znaménko, proto funkce f nemá v $D(f)$ lokální extrémy.

Cvičení 2.1.1: Vyšetřete lokální extrémy funkcí:

1. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$,
2. $z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$,
3. $z = x - 2y + \ln\sqrt{x^2+y^2} + 3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

2.2 Implicitní funkce

Pro kladnou konstantu r jsou $f: y = \sqrt{r^2 - x^2}$ a $f: x^2 + y^2 - r^2 = 0,\ y \geq 0$, dvě různá vyjádření téže funkce jedné proměnné definované na uzavřeném intervalu $\langle -r, r\rangle$. Grafem funkce f je horní polovina kružnice poloměru r se středem v bodě $O = [0, 0]$.

Nyní se budeme zabývat podmínkami, za kterých je rovnicí $F(x, y) = 0$ v okolí nějakého bodu $M = [x_0, y_0]$ definovaná funkce jedné proměnné $y = f(x)$, kdy a kde existuje, a co jsme schopni o ní říci. Podobně se budeme ptát, za jakých podmínek je rovnicí $F(x, y, z) = 0$ definovaná funkce dvou proměnných $z = z(x, y)$.

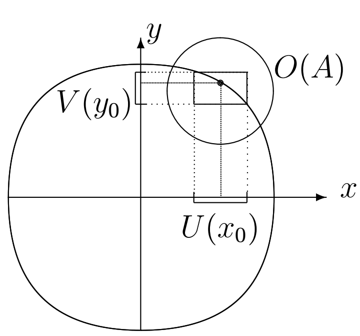
2.2.1 Implicitní funkce jedné proměnné

Pojem implicitní funkce jedné proměnné

Definice 2.2.1: *Řekneme, že v okolí $O(A) \subset \mathbb{E}_2$ bodu $A = [x_0, y_0]$ je rovnicí $F(x, y) = 0$* ***určena implicitně funkce*** *$f: y = f(x)$, jestliže*

1. *F je definovaná v okolí $O(A)$ a $F(A) = 0$,*
2. *f je definovaná v nějakém okolí $U(x_0)$ a přitom $f(x_0) = y_0$, $F(x, f(x)) = 0$ pro $x \in U(x_0)$,*
3. *f zobrazuje $U(x_0)$ do $V(y_0)$, přičemž $U(x_0) \times V(y_0) \subset O(A)$.*

△



$U(x_0) \times V(y_0) \subset O(A)$

Bod $A = [x_0, y_0]$ je vyznačen tečkou.

Podmínky existence implicitní funkce jedné proměnné

Tvrzení: *Předpokládejme, že jsou splněny předpoklady* Definice 2.2.1 *a rovnicí* $F(x, y) = 0$ *je v okolí* $O(A)$ *určena implicitně funkce* $f : y = f(x)$. *Má-li funkce* F *v okolí* $O(A)$ *spojité parciální derivace* F'_x, F'_y *a* $F'_y(A) \neq 0$, *pak*

1) *funkce* f *je určena jednoznačně,*

2) *funkce* f *je spojitá na* $U(x_0)$ *a pro* $x \in U(x_0)$ *platí*

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

Důkaz tohoto tvrzení překračuje rámec textu. Proto budeme situaci ilustrovat příkladem a obecnou technikou výpočtu derivace funkce f.

Příklad 2.2.1: V bodě $A = [0, y_0]$ najděte rovnice tečny a normály ke grafu funkce $f : y = y(x)$ definované rovnicí $y^3 - xy - 8 = 0$. Vyšetřete konvexnost či konkávnost funkce f v bodě $x_0 = 0$.

Řešení: (Graf funkce f můžeme nakreslit speciálními prostředky, zde prostřednictvím programu MAPLE. Tuto možnost vždy nemáme, proto slouží graf jen ke zlepšení geometrické představy.) Je dána funkce $F(x, y) \equiv y^3 - xy - 8 = 0$ a bod $A = [x_0, y_0] = [0, y_0]$. Nejprve vyšetříme, zda funkce f proměnné x požadovaných vlastností existuje. Ověříme platnost předpokladů $F(A) = F(0, y_0) = y_0^3 - 8 = 0$. Platí $y_0^3 = 8 = 2^3$ a tedy $A = [x_0, y_0] = [0, 2]$. Existují spojité parciální derivace $F'_x(x, y) = -y, F'_y(x, y) = 3y^2 - x$ funkce F v nějakém okolí $O(A)$ a $F'_y(A) = F'_y(0, 2) = 12 \neq 0$. Funkce $f : y = y(x)$ požadovaných vlastností proto existuje a splňuje podmínku $y(0) = 2$. Funkce f má v bodě $x_0 = 0$ derivaci a podle vzorce je to číslo $f'(0) = -F'_x(0, 2)/F'_y(0, 2) = 2/12 = 1/6$. Toto číslo můžeme najít i následujícím postupem. Pro funkci $f : y = y(x)$ platí rovnice $F(x, y(x)) = 0$, tj.

$$(y(x))^3 - xy(x) - 8 = 0.$$

Derivujeme-li tuto rovnici podle proměnné x jako složenou funkci, získáme podmínku

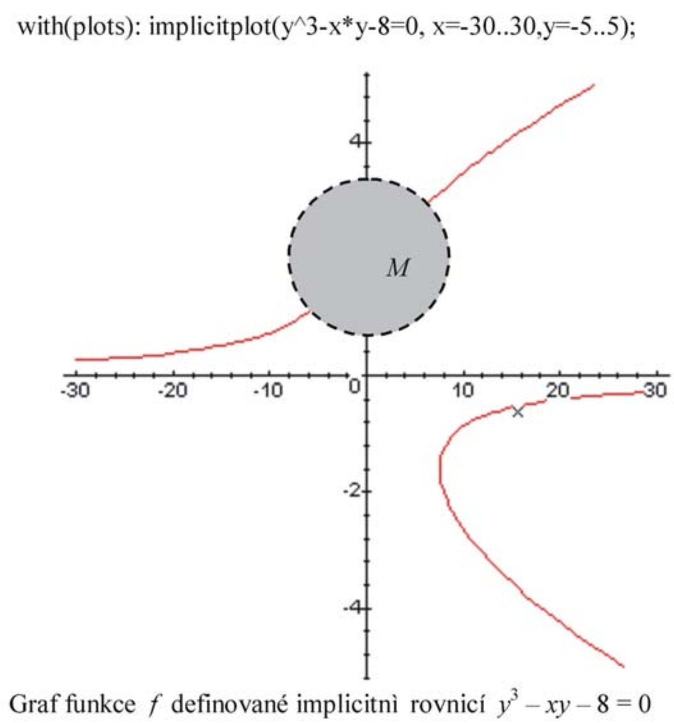
$$3y^2(x)y'(x) - y(x) - xy'(x) = 0. \tag{2.1}$$

Pro $x = 0$ a $y(0) = 2$ pak platí $3 \cdot 2^2 \cdot y'(0) - 2 = 0$ a $f'(0) = y'(0) = 1/6$. Jak víme, rovnice tečny procházející bodem $A = [x_0, y_0]$ má pro $f'(x_0) \neq 0$ tvar

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

rovnice normály má tvar

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$



Obrázek 2.1: Graf funkce f definované implicitně rovnicí $y^3 - xy - 8 = 0$.

Dosazením do rovnic získáme výsledek úlohy: V bodě $A = [0, 2]$ je rovnice tečny $y = \frac{1}{6}x + 2$, rovnice normály je $y = 2 - 6x$. Derivujeme-li opět rovnici (2.1) podle proměnné x, získáme pro $y''(x)$ rovnici

$$6y(x)y'^{\,2}(x) + 3y^2(x)y''(x) - 2y'(x) - xy''(x) = 0.$$

Pro $x = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1/6$ pak platí $6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot 2^2 \cdot y''(0) - 2\frac{1}{6} = 0$ a $y''(0) = 1/36 > 0$. Funkce f je proto v bodě $x_0 = 0$ konvexní.

Cvičení 2.2.1:

1. Určete $f'(0), f''(0)$ pro funkci $y = f(x)$ určenou implicitně rovnicí $y \sin x + x^2 + y^3 = 1$, vyhovuje-li funkce f podmínce $f(0) = 1$.

2. Určete vztahy pro výpočet y'' funkcí určených rovnicemi

   a) $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$,

   b) $x + y = e^{x-y}$.

3. V bodě $A = [x_0, 1]$ $(x_0 > 0)$ určete tečnu a normálu ke grafu funkce f dané implicitně rovnicí $x^2y - xy^3 - 2 = 0$.

2.2.2 Implicitní funkce dvou proměnných

Pojmy a podmínky existence implicitní funkce dvou proměnných jsou velmi podobné pojmu a podmínkám existence implicitní funkce jedné proměnné. Grafické znázornění je již problémové.

Pojem implicitní funkce dvou proměnných

Definice 2.2.2: *Řekneme, že v okolí $O(A) \subset \mathbb{E}_3$ bodu $A = [x_0, y_0, z_0]$ je rovnicí $F(x, y, z) = 0$* ***určena implicitně funkce*** *$f : z = f(x, y)$, jestliže*

1. *F je definovaná v okolí $O(A)$ a $F(A) = 0$,*
2. *f je definovaná v nějakém okolí $U(x_0, y_0)$ a přitom $f(x_0, y_0) = z_0$, $F(x, y, f(x, y)) = 0$ pro $[x, y] \in U(x_0, y_0)$,*
3. *f zobrazuje $U(x_0, y_0)$ do $V(z_0)$, přičemž $U(x_0, y_0) \times V(z_0) \subset O(A)$.*

△

Podmínky existence implicitní funkce dvou proměnných

Tvrzení: *Předpokládejme, že jsou splněny předpoklady* Definice 2.2.2 *a rovnicí $F(x, y, z) = 0$ je v okolí $O(A)$ určena implicitně funkce $f : z = f(x, y)$. Má-li funkce F v okolí $O(A)$ spojité parciální derivace F'_x, F'_y, F'_z a $F'_z(A) \neq 0$, pak*

1) *funkce f je určena jednoznačně,*

2) *funkce f je spojitá na $U(x_0, y_0)$ a pro $[x, y] \in U(x_0, y_0)$ existují parciální derivace*

$$f'_x(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, f(x, y))}{F'_z(x, y, f(x, y))}, \qquad f'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, f(x, y))}{F'_z(x, y, f(x, y))}.$$

$\surd\surd$ **Komentář 2.2.1:** Vzorce pro výpočet parciálních derivací funkce $f : z = z(x, y)$ lze odvodit způsobem, který nám často slouží k výpočtu parciálních derivací funkce dané implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$. Je dobré způsob výpočtu ovládat, protože umožňuje výpočet parciálních derivací vyšších řádů bez použití stále komplikovanějších vzorců. Pro implicitně definovanou funkci dvou proměnných platí v jistém okolí $O(x_0, y_0)$ bodu $[x_0, y_0]$ podmínka

$$F(x, y, z(x, y)) = 0.$$

Postupným parciálním derivováním této rovnice podle proměnné x obdržíme

$$F'_x(x, y, z) \cdot (x)'_x + F'_y(x, y, z) \cdot (y)'_x + F'_z(x, y, z) \cdot (z(x, y))'_x = 0,$$

$$F'_x(x,y,z) + F'_z(x,y,z)\cdot z'_x(x,y) = 0 \Longrightarrow z'_x(x,y) = -\frac{F'_x(x,y,z(x,y))}{F'_z(x,y,z(x,y))},$$

$$F'_x(x,y,z)\cdot(x)'_y + F'_y(x,y,z)\cdot(y)'_y + F'_z(x,y,z)\cdot(z(x,y))'_y = 0,$$

$$F'_y(x,y,z) + F'_z(x,y,z)\cdot z'_y(x,y) = 0 \Longrightarrow z'_y(x,y) = -\frac{F'_y(x,y,z(x,y))}{F'_z(x,y,z(x,y))}$$

a stačí dosadit do získaných vztahů čísla x_0, y_0 a $z(x_0,y_0) = z_0$, tj. souřadnice bodu M.

První z rovnic nám dává možnost vypočítat parciální derivace z''_{xx}, z''_{xy} (pokud existují), druhá pak umožňuje výpočet z''_{yx}, z''_{yy} (pokud existují). Budeme například předpokládat, že funkce F má spojité parciální derivace druhého řádu a naznačíme výpočet z''_{xy}. Parciálně derivujme rovnici

$$F'_x(x,y,z(x,y)) + F'_z(x,y,z(x,y))z'_x(x,y) = 0$$

podle proměnné y. Pak F'_x, F'_z derivujeme jako složené funkce:

$$(F'_x + F'_z z'_x)'_y = (F'_x)'_y + (F'_z)'_y z'_x + F'_z z''_{xy} =$$

$$= \left(F''_{xx}\cdot(x)'_y + F''_{xy}\cdot(y)'_y + F''_{xz}\cdot(z)'_y\right) + \left(F''_{zx}\cdot(x)'_y + F''_{zy}\cdot(y)'_y + F''_{zz}\cdot(z)'_y\right) z'_x +$$
$$+ F'_z z''_{xy} = F''_{xy} + F''_{xz} z'_y + \left(F''_{zy} + F''_{zz} z'_y\right) z'_x + F'_z z''_{xy} = 0.$$

S využitím vzorců pro parciální derivace z'_x, z'_y prvních řádů můžeme z poslední podmínky vyjádřit hledanou parciální derivaci z''_{xy}.

Příklad 2.2.2: Ověřte, že rovnicí $x^2+y^2+z^2-6=0$ a bodem $M=[1,1,2]$ je v okolí bodu $A=[1,1]$ definovaná implicitně funkce $f: z = z(x,y)$. Vypočítejte parciální derivace z'_x, z'_y, z''_{xx} v bodě A.

Řešení: Rovnici přepíšeme do tvaru $F(x,y,z) \equiv x^2+y^2+z^2-6=0$. Platí pak $F(M) = F(x_0,y_0,z_0) = F(1,1,2) = 0$. Existují spojité parciální derivace $F'_x(x,y,z) = 2x$, $F'_y(x,y,z) = 2y$, $F'_z(x,y,z) = 2z$ v okolí každého bodu $[x,y,z] \in \mathbb{E}_3$, proto existují také v okolí bodu M. Parciální derivace $F'_z(M) = 4 \neq 0$. Rovnice $F(x,y,z) = 0$ definuje proto v jistém okolí bodu $A = [x_0,y_0] = [1,1]$ funkci $f: z = z(x,y)$ a platí $z(x_0,y_0) = z_0$, tj. $z(1,1) = 2$. Pro funkci f je splněna podmínka

$$F(x,y,z(x,y)) \equiv x^2 + y^2 + (z(x,y))^2 - 6 = 0$$

a parciálním derivováním této rovnice (na levé straně je složená funkce) získáme rovnice pro parciální derivace prvního řádu:

$$\frac{\partial}{\partial x}: \quad 2x + 2z(x,y)z'_x(x,y) = 0; \qquad \frac{\partial}{\partial y}: \quad 2y + 2z(x,y)z'_y(x,y) = 0. \tag{2.2}$$

Postupně získáváme z obou rovnic vyjádření

$$z'_x(x,y) = -\frac{x}{z(x,y)} \Rightarrow z'_x(1,1) = -\frac{1}{z(1,1)} = -\frac{1}{2},$$

$$z'_y(x,y) = -\frac{y}{z(x,y)} \Rightarrow z'_y(1,1) = -\frac{1}{z(1,1)} = -\frac{1}{2}.$$

Všimněme si, že existují spojité parciální derivace druhého řádu funkce F a můžeme proto v tomto postupu pokračovat. Další parciální derivací první rovnice v (2.2) podle proměnné x získáme rovnici pro hledanou parciální derivaci z''_{xx} :

$$2 + 2z'_x(x,y) \cdot z'_x(x,y) + 2z(x,y)z''_{xx}(x,y) = 0$$

a odtud

$$z''_{xx}(x,y) = -\frac{1 + (z'_x(x,y))^2}{z(x,y)} \Rightarrow z''_{xx}(1,1) = -\frac{1 + (z'_x(1,1))^2}{z(1,1)} = -\frac{5}{8}.$$

Poznámka: V mnoha úlohách je přímo v zadání uvedeno, že rovnice tvaru $F(x,y,z) = 0$ definuje implicitně funkci $f : z = z(x,y)$ a podmínky existence není proto potřebné ověřovat. Uvažujeme-li obecný bod $M = [x,y,z]$, provádíme všechny výpočty za podmínky $F(M) = 0$.

Cvičení 2.2.2:

1. Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkce $z = f(x,y)$ v bodě A, je-li funkce f dána implicitně rovnicí $e^z + x^2y + z + 5 = 0$, $A = [1,-6,0]$.
2. Určete parciální derivace 1. řádu funkce $z = f(x,y)$ určené rovnicí $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$.
3. Určete parciální derivaci z''_{xy} funkce $z = f(x,y)$ určené rovnicí $x^3 + y^3 + z^3 - 3z = 0$.

2.3 Absolutní extrémy funkce

V této části textu se naučíme hledat *absolutní extrémy* a seznámíme se s pojmem *vázané extrémy* funkcí dvou a tří proměnných.

Definice 2.3.1: ***Absolutním maximem*** (***minimem***) *funkce* $f : z = f(x,y)$ *na množině* $M \subset D(f)$ *nazýváme největší (nejmenší) funkční hodnotu funkce* f *(pokud existuje) na množině* M.

$\triangle$

Připomeňme si, že pokud $M \subset D(f)$ je kompaktní množina v $\mathbb{E}_2$, pak podle Weierstrassovy věty nabývá spojitá funkce f na M své největší a nejmenší hodnoty. Je jasné, že v tomto případě mohou absolutní extrémy nastat

a) buď ve vnitřních bodech množiny M, které jsou stacionárními body funkce f,
b) nebo na hranici ∂M množiny M.

Extrémy funkce f jsou na hranici ∂M vázány podmínkami tvaru $F(x, y) = 0$ a budeme hovořit o vázaných extrémech funkce f. Úlohu lze zobecnit pro více proměnných.

Uveďme si některé příklady.

Příklad 2.3.1: Prvním příkladem je funkce $f : z = x^2 + y^2$. I když $D(f) = \mathbb{E}_2$, což není kompaktní množina, přesto je jasné, že funkce f má v bodě $O = [0, 0]$ absolutní minimum, neboť pro všechny body $X = [x, y] \in \mathcal{P}(O)$ platí $f(X) > f(0)$.

$\surd\surd$ **Komentář 2.3.1:** Podmínku $F(x, y) = 0$ lze často do našich výpočtů zahrnout pomocí parametrizace $x = x(t), y = y(t)$ $(t \in \langle\alpha, \beta\rangle)$ tak, že $F(x(t), y(t)) \equiv 0$ je splněna identicky a funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ se pro body splňující podmínku $F(x, y) = 0$ změní ve funkci jedné proměnné $z(t) = f(x(t), y(t))$, $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, pro kterou umíme úlohu extrémů funkce řešit.

Příklad 2.3.2: Najděte absolutní extrémy funkce $z = f(x, y) = x + y$ na uzavřeném oboru $\bar{M} = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$.

> Při hledání absolutních extrémů funkce dvou proměnných si můžeme výpočet zjednodušit. Stačí si uvědomit, že postačuje porovnání funkčních hodnot
>
> a) ve stacionárních bodech ležících uvnitř kompaktní množiny M,
> b) ve stacionárních bodech na její hranici ∂M,
> c) ve společných bodech jednotlivých částí hranice (v nichž se mění jejich rovnice).

Řešení: Stacionární body funkce f v M neexistují, protože

$$f'_x(x, y) = f'_y(x, y) = 1 \neq 0.$$

Budeme proto vyšetřovat funkci f na hranici ∂M, která se skládá ze tří různých částí.

První částí hranice je úsečka $\langle 0,2\rangle$ na ose x, kterou můžeme vyjádřit podmínkou $y=0,\ 0\le x\le 2$. Na úsečce platí $z(x,0)=z(x)=x,\ x\in\langle 0,2\rangle$. Funkce $z=z(x,0)$ nemá lokální extrémy *v intervalu* $(0,2)$, protože $z'(x)=1\ne 0$.

Další částí hranice je úsečka $\langle 0,2\rangle$ na ose y, kterou můžeme opět vyjádřit podmínkou $x=0,\ 0\le y\le 2$. Na úsečce platí $z(0,y)=z(y)=y,\ y\in\langle 0,2\rangle$. Funkce $z=z(0,y)$ nemá lokální extrémy *v intervalu* $(0,2)$, protože $z'(y)=1\ne 0$.

Poslední částí hranice je část kružnice $x^2+y^2-4=0,\ x\ge 0, y\ge 0$, a parametrizací $x=x(t)=2\cdot\cos t,\ y=y(t)=2\cdot\sin t,\ t\in\langle 0,\pi/2\rangle$, získáme funkci $z(t)=x(t)+y(t)=2\cdot(\cos t+\sin t),\ t\in\langle 0,\pi/2\rangle$, jedné reálné proměnné t. Stacionární body funkce $z(t)$ najdeme jako řešení rovnice $z'(t)=2\cdot(-\sin t+\cos t)=0$ pro $t\in(0,\pi/2)$. Podmínka je splněna pro $\sin t=\cos t$, tj. tg $t=1$ a řešením je hodnota $t=t_0=\pi/4\in(0,\pi/2)$, které odpovídá stacionární bod $S=[\sqrt{2},\sqrt{2}]$ ležící na kružnici.

Zbývá porovnat funkční hodnoty ve stacionárním bodě $S=[\sqrt{2},\sqrt{2}]$ a v koncových bodech $[0,0],[2,0],[0,2]$ jednotlivých částí hranice. Mezi funkčními hodnotami $f(S)=2\sqrt{2}, f(0,0)=0,\ f(2,0)=2, f(0,2)=2$ hledáme hodnoty absolutního minima a absolutního maxima funkce f.

Absolutní minimum funkce f nastává v bodě $[0,0]\in\bar{D}$ a $f(0,0)=0$. Absolutní maxima funkce f nastanou v bodech $[2,0],[0,2]\in\bar{D}$ a $f(2,0)=f(0,2)=2$.

$\surd\surd$ **Komentář 2.3.2:** Při splnění podmínek pro existenci funkce dané implicitně lze z podmínky $F(x,y,z)=0$ vyjádřit některou z proměnných jako funkci proměnných zbývajících, například $z=z(x,y)$. Úloha nalezení extrémů funkce $u=f(x,y,z)$ se pak změní v úlohu hledání extrémů funkce $u=f(x,y,z(x,y))=u(x,y)$ dvou proměnných, kde $[x,y]\in M$, resp. $[x,y]\in\bar{M}$ uzávěru oblasti $M\subset\mathbb{E}_2$.

Příklad 2.3.3: Vodní nádrž tvaru kvádru má objem $32\,m^3$. Najděte rozměry nádrže takové, aby měl nátěr stěn nádrže nejmenší spotřebu barvy.

Řešení: Označíme-li šířku, délku a výšku kvádru jako x,y,z, pak potřebujeme natřít povrch čtyř stěn a dna nádrže $u=P(x,y,z)=xy+2xz+2yz$ při podmínce $xyz=32$. Hledáme extrémy funkce P vázané podmínkami $F(x,y,z)\equiv xyz-32=0,\ x>0,\ y>0,\ z>0$. Z podmínky $F(x,y,z)=0$ lze vyjádřit například $z=32/(xy)=z(x,y)$ a úloha se mění v problém nalezení lokálního minima funkce $u=u(x,y)=P(x,y,z(x,y))=xy+2(x+y)z(x,y)=xy+64(1/y+1/x)$ pro $x>0, y>0$, tj. v prvním kvadrantu roviny.

Stacionární body funkce $z(x,y)$ jsou řešeními rovnic $z'_x(x,y)=z'_y(x,y)=0$, kde

$$z'_x(x,y)=y-64/x^2=\frac{x^2y-64}{x^2},\quad z'_y(x,y)=x-64/y^2=\frac{xy^2-64}{y^2}.$$

Řešením soustavy rovnic $x^2y = xy^2 = 64$ je při podmínkách $x > 0, y > 0$ jediný stacionární bod $S = [4, 4]$ a pomocí parciálních derivací druhého řádu

$$z''_{xx}(x, y) = 128/x^3, \quad z''_{xy}(x, y) = 1, \quad z''_{yy}(x, y) = 128/y^3$$

nalezneme

$$z''_{xx}(S) = 2, \quad z''_{xy}(S) = 1, \quad z''_{yy}(S) = 2.$$

Pomocí determinantu

$$D(S) = \begin{vmatrix} z''_{xx}(S) & z''_{xy}(S) \\ z''_{xy}(S) & z''_{yy}(S) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

a dle znaménka $z''_{xx}(S) = 2 > 0$ nyní umíme rozhodnout, že v bodě $S = [4, 4]$ nastává požadované ostré lokální minimum funkce $z(x, y)$.

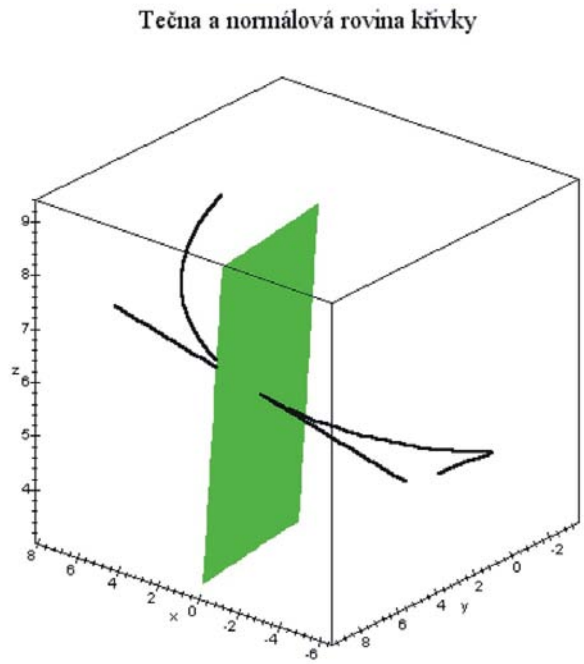
Řešením naší úlohy jsou rozměry $x = 4\,m$, $y = 4\,m$ a $z = z(4, 4) = 32/(4\cdot 4) = 2\,m$ vodní nádrže.

Cvičení 2.3.1: Najděte absolutní extrémy funkcí

1. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 1$ v uzavřeném trojúhelníku, který je ohraničený souřadnicovými osami a přímkou o rovnici $x + y - 2 = 0$.
2. $z = x^2 - xy + y^2$ na oblasti určené nerovnicí $|x| + |y| \leq 1$.
3. $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ v uzavřené oblasti ohraničené křivkami o rovnicích $y = x^2$, $y = 4$.

2.4 Tečna a normálová rovina prostorové křivky

Z analytické geometrie víme, že dvěma různými body je určena přímka. Máme-li například body $A = [3, 1, 2]$, $B = [1, 0, 3]$, pak pro přímku p určenou těmito body dostáváme parametrické rovnice $p: \ x = 3 - 2t,\ y = 1 - t,\ z = 2 + t,\ t \in \mathbb{R}$. Vidíme, že každé reálné hodnotě parametru t odpovídá právě jeden bod přímky p a že souřadnice x, y, z jsou funkcemi parametru t. Kdybychom chtěli popsat úsečku určenou body A, B, pak by stačilo omezit hodnoty parametru v rovnicích přímky p na interval $\langle 0, 1\rangle$. Můžeme tedy říci, že úsečka s koncovými body A, B je obrazem intervalu $\langle 0, 1\rangle$ při zobrazení $\Gamma(t) = (3 - 2t, 1 - t, 2 + t),\ t \in \langle 0, 1\rangle$. Přímka a úsečka jsou jednoduchými příklady tzv. křivek. Jde vlastně o množiny bodů v $\mathbb{E}_3$, které jsou určeny funkcemi $x = x(t), y = y(t), z = z(t),\ t \in I \subseteq \mathbb{R}$, kde I je interval. Přitom při vyjádření souřadnic $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ musíme již připustit obecnější funkce (například polynomiální, exponenciální, goniometrické apod.). Aby množiny takto popsaných bodů v $\mathbb{E}_3$ byly opravdu křivkami (jak je intuitivně chápeme), pak je nezbytné na zobrazení Γ klást některé další požadavky a nestačí například požadovat pouze spojitost složek $x(t), y(t), z(t)$.



Obrázek 2.2: Tečna a normálová rovina prostorové křivky.

Je totiž známo, že v takovém případě pak mohou body vyplnit například celou kouli.

Nyní si již připomeneme definici křivky, s níž jste se seznámili v integrálním počtu.

2.4.1 Prostorová křivka

Definice 2.4.1: *Množinu $\gamma \subset \mathbb{E}_3$ nazveme **křivkou** v prostoru, jestliže existuje spojité zobrazení Γ intervalu $I \subset \mathbb{R}$ na množinu γ takové, že platí:*

1) *Zobrazení Γ je prosté na I s výjimkou konečně mnoha bodů.*

2) *Zobrazení Γ je po částech třídy C^1 na I, tj. Γ' je spojitá s výjimkou konečně mnoha bodů, v nichž existují jednostranné derivace, které mohou být různé.*

3) *Γ' má až na konečně mnoho bodů nenulovou hodnotu v každém bodě intervalu I (je-li interval I uzavřený, uvažujeme v koncových bodech jednostranné derivace).*

*Zobrazení Γ pak nazýváme **parametrizací** křivky γ. Je-li parametrizace Γ křivky γ prosté zobrazení a je-li třídy C^1 na celém intervalu I a má přitom nenulovou derivaci v každém bodě intervalu I, pak nazýváme γ **obloukem** a zobrazení Γ jeho parametrizací.*

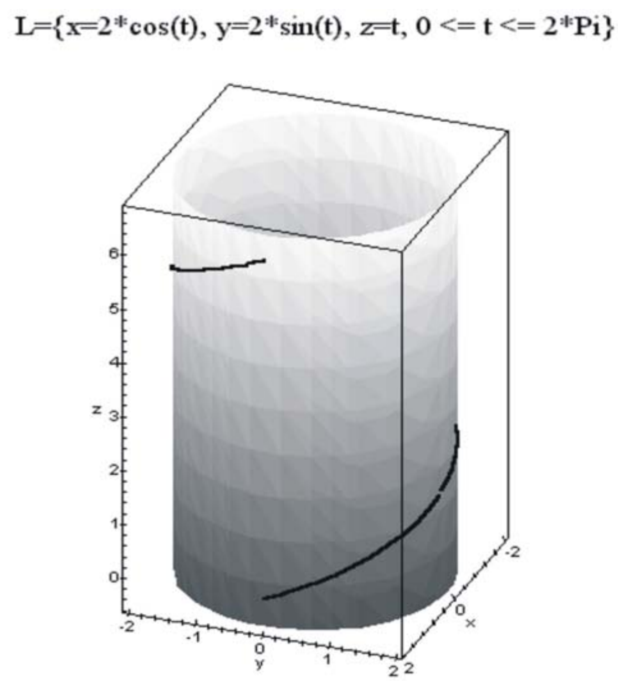
Často budeme zapisovat křivku (oblouk) γ ve tvaru

$$\gamma : x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in \langle \alpha, \beta \rangle,$$

nebo ve vektorovém tvaru

$$\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = (x(t), y(t), z(t)), t \in \langle \alpha, \beta \rangle.$$

Poznámka: Křivku zadanou vektorovou funkcí skalárního argumentu $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ můžeme interpretovat jako množinu koncových bodů polohových vektorů (tzv. hodograf) přiřazených množině parametrů $t \in I$.



Obrázek 2.3: $L \equiv \gamma : x = 2 \cdot \cos t, y = 2 \cdot \sin t, z = t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Příklad 2.4.1: Ověřte, že $\gamma : x = r \cdot \cos t, y = r \cdot \sin t, z = t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $r \in \mathbb{R}^+$, je obloukem.

Řešení: Zobrazení $\Gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, t)$ je evidentně prosté a třídy C^1 na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Dále platí: $x'(t) = -r \sin t, y'(t) = r \cos t, z'(t) = 1$ a navíc

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = r^2 \cdot \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) + 1 = r^2 + 1 \neq 0$$

pro každé $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Graf křivky γ nazýváme *šroubovicí* (Obr. 2.3). Křivka γ leží na válcové ploše o rovnici $x^2 + y^2 = r^2$ s povrchovými přímkami rovnoběžnými s osou z.

Poznámka: Při řešení úloh, vlastnosti $1), 2), 3)$ definice nebudeme samostatně ověřovat. Pro řešení konkrétních příkladů je důležité si uvědomit vztah mezi bodem ***oblouku*** a parametrem. Bodu $M = [x_M, y_M, z_M] \in \gamma$ odpovídá právě jedna hodnota $t = t_M \in \langle\alpha, \beta\rangle$ a $\vec{r}(t_M) = (x(t_M), y(t_M), z(t_M))$ je polohovým vektorem bodu M. Víme, že polohový vektor bodu má stejné souřadnice jako jeho koncový bod. Proto můžeme počítat souřadnice bodu M pomocí hodnoty parametru t_M nebo naopak hodnotu t_M parametru ze souřadnic bodu M jako společné řešení tří rovnic $x(t_M) = x_M, y(t_M) = y_M, z(t_M) = z_M$ (rozepsaný vztah).

Příklad 2.4.2: Je dán oblouk

$$\gamma : x = t^2, y = t^2 + 1, z = t^3 + 2t - 1, t \in \langle 0, 4\rangle.$$

Vyřešte následující úlohy:

a) Najděte bod $M \in \gamma$, který odpovídá parametru $t = t_M = 1$.

b) Zjistěte, zda může ležet bod $K = [x_K, y_K, z_K] = [4, 2, z_K]$ na křivce γ.

c) Bod $S = [4, y_S, z_S]$ je bodem křivky γ. Určete parametr t_S a souřadnice bodu S.

Řešení:

a) Polohový vektor bodu $M = [x_M, y_M, z_M]$ je

$$\vec{r}(t_M) = (x(t_M), y(t_M), z(t_M)) = (t_M^2, t_M^2 + 1, t_M^3 + 2t_M - 1) = (1, 2, 2) =$$

$$= (x_M, y_M, z_M) = \vec{r}_M.$$

Našli jsme souřadnice $M = [1, 2, 2]$ bodu M.

b) Polohový vektor bodu $K = [x_K, y_K, z_K] = [4, 2, z_K]$ je

$$\vec{r}(t_K) = (x(t_K), y(t_K), z(t_K)) = (t_K^2, t_K^2 + 1, t_K^3 + 2t_K - 1) = (4, 2, z_K) = \vec{r}_K$$

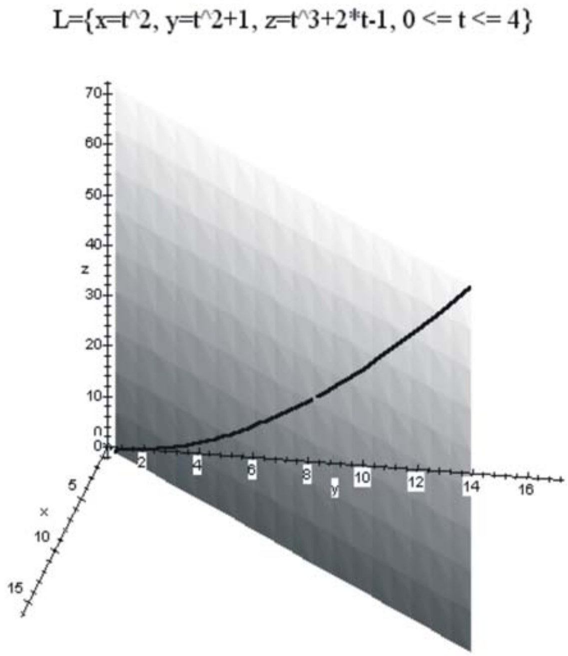
a současně musí být splněno $t_K^2 = 4, t_K^2 + 1 = 2$. To ovšem není možné a proto nemůže ležet bod K na křivce γ.

c) Polohový vektor bodu $S = [x_S, y_S, z_S] = [4, y_S, z_S]$ je

$$\vec{r}(t_S) = (t_S^2, t_S^2 + 1, t_S^3 + 2t_S - 1) = (4, y_S, z_S) = \vec{r}_S$$

a dostáváme podmínku $t_S^2 = 4$. Jsou možné dvě hodnoty, které podmínku splňují. Číslo $t_S = -2$ není obsaženo v definičním intervalu křivky γ a proto úloze nevyhovuje. Číslo $t_S = 2$ je v definičním intervalu křivky a proto existuje bod $S \in \gamma$, pro který najdeme dosazením parametru $t_S = 2$ souřadnice $S = [x_S, y_S, z_S] = [4, 5, 11]$.

Křivka γ leží (Obr. 2.4) v rovině $y = x + 1$, protože $x = t^2$ a současně $y = t^2 + 1 = x + 1$.



Obrázek 2.4: $L \equiv \gamma : x = t^2, y = t^2 + 1, z = t^3 + 2t - 1, t \in \langle 0, 4 \rangle$.

2.4.2 Geometrický význam derivace tečného vektoru

Některé operace s vektorovými funkcemi skalárního argumentu zavedeme po složkách. Například podobně jako u limity posloupnosti bodů definujeme limitu vektorové funkce

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \lim_{t \to t_0} \left(x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \right) = \lim_{t \to t_0} x(t)\vec{i} + \lim_{t \to t_0} y(t)\vec{j} + \lim_{t \to t_0} z(t)\vec{k},$$

pokud existují limity $\lim_{t \to t_0} x(t), \lim_{t \to t_0} y(t), \lim_{t \to t_0} z(t)$ v bodě $t_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Zápis v souřadnicích pak bude vypadat takto:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \lim_{t \to t_0} (x(t), y(t), z(t)) = \left(\lim_{t \to t_0} x(t), \lim_{t \to t_0} y(t), \lim_{t \to t_0} z(t) \right),$$

tj. výpočet limity vektoru provádíme výpočtem limit jednotlivých souřadnic vektoru $\vec{r}(t)$.

Uvažujme oblouk

$$\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = (x(t), y(t), z(t)), t \in \langle \alpha, \beta \rangle.$$

Podle definice oblouku existují spojité derivace $x'(t), y'(t), z'(t)$ v každém $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ a například

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Můžeme proto uvažovat vektor

$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}(x(t+\Delta t) - x(t), y(t+\Delta t) - y(t), z(t+\Delta t) - z(t)) =$$

$$= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \right) =$$

$$= (x'(t), y'(t), z'(t)),$$

kde jsme označili diferenci (rozdíl) polohových vektorů $\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ jako $\Delta \vec{r}(t)$. Vzhledem k podmínce $x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 \neq 0$ v definici oblouku je $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{o}$.

Δ

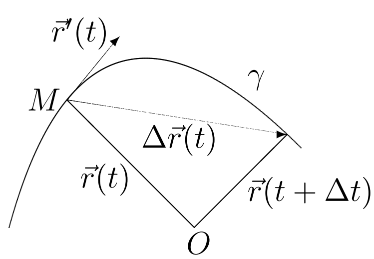
Vektor $\vec{r}\,'(t)$ je definován vztahem

$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Geometricky chápeme vektor $\vec{r}\,'(t)$ jako tečný vektor k oblouku γ v bodě $M \in \gamma$ s parametrem $t = t_M$.

Δ

$\surd\surd$ Komentář 2.4.1:



Pro $\Delta t \to 0$ je $\Delta \vec{r}(t) = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) \to \vec{o}$, tj. jeho délka se konverguje k nule. Z obrázku je však vidět, že se jeho směr postupně mění do směru směrového vektoru tečny k oblouku γ. Vektory $\Delta \vec{r}(t)$ a $\Delta \vec{r}(t)/\Delta t$ jsou kolineární a liší se jen svojí délkou. Zatímco pro $\Delta t \to 0$ platí $\Delta \vec{r}(t) \to \vec{o}$, je $\Delta \vec{r}(t)/\Delta t \to \vec{r}\,'(t) \neq \vec{o}$ a vektor $\vec{r}\,'(t_M)$ můžeme geometricky chápat jako tečný vektor k oblouku γ v bodě $M \in \gamma$.

2.4.3 Tečna a normálová rovina ke křivce

Abychom se nemuseli zabývat body, ve kterých neexistují derivace nebo je $\vec{r}\,'(t)$ nulovým vektorem, omezíme se v dalším výkladu na křivky, které jsou **oblouky**.

Známe vztah mezi bodem $M = [x_M, y_M, z_M]$ křivky γ a jeho polohovým vektorem $\vec{r}_M$. Tento vztah je zprostředkován parametrem $t = t_M \in \langle \alpha, \beta \rangle$ bodu M. Parametr t_M umíme určit. Jsme proto schopni najít vektor $\vec{r}\,'(t_M)$, který může mít dvojí geometrický význam.

Vektor $\vec{s} = \vec{r}\,'(t_M)$ je směrovým vektorem tečny ke křivce γ v bodě M a můžeme proto vyjádřit parametrické rovnice tečny q ke křivce γ v bodě M rozepsáním vektorové rovnice $q : \vec{r} = \vec{r}(s) = \vec{r}(t_M) + s\vec{r}\,'(t_M), s \in \mathbb{R}$, tečny q.

Vektor $\vec{n} = (a, b, c) = \vec{r}\,'(t_M)$ je *normálovým vektorem* roviny ρ, ke které je v bodě M tečna q kolmá. Rovinu ρ nazýváme *normálovou rovinou křivky* γ v bodě M. Obecná rovnice roviny ρ je určena bodem M a normálovým vektorem $\vec{n}$.

Tvrzení: *Tečna q k prostorové křivce*

$$\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in \langle \alpha, \beta \rangle$$

má v bodě $M = [x_M, y_M, z_M] \in \gamma$ parametrické rovnice

$$\begin{aligned} x &= x(t_M) + sx'(t_M) = x_M + sx'(t_M), \\ y &= y(t_M) + sy'(t_M) = y_M + sy'(t_M), \\ z &= z(t_M) + sz'(t_M) = z_M + sz'(t_M), \\ s &\in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Normálová rovina ρ sestrojená v bodě $M = [x_M, y_M, z_M] \in \gamma$ k prostorové křivce γ má rovnici

$$\rho : (x - x_M) \cdot x'(t_M) + (y - y_M) \cdot y'(t_M) + (z - z_M) \cdot z'(t_M) = 0. \tag{2.4}$$

Příklad 2.4.3: V bodě $M = [4, 5, 11]$ určete rovnice tečny a normálové roviny ke křivce

$$\gamma : x = t^2, y = t^2 + 1, z = t^3 + 2t - 1, t \in \langle 0, 4 \rangle.$$

Řešení: Bodu M odpovídá $t_M = 2$. Protože $\vec{r}(t) = (t^2, t^2 + 1, t^3 + 2t - 1)$, platí $\vec{r}\,'(t) = (2t, 2t, 3t^2 + 2)$. Pak $\vec{r}\,'(t_M) = \vec{r}\,'(2) = (4, 4, 14)$.

Za směrový vektor tečny ke křivce γ v bodě $M = [4, 5, 11]$ můžeme vzít vektor $\vec{s} = (2, 2, 7)$, kolineární s vektorem $\vec{r}\,'(2) = (4, 4, 14)$. Parametrické rovnice tečny proto jsou

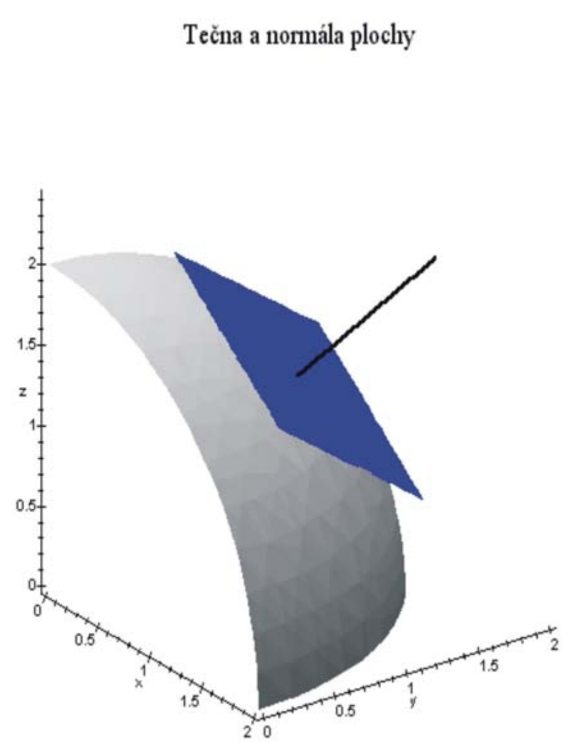
$$p : x = 4 + 2s, y = 5 + 2s, z = 11 + 7s, s \in \mathbb{R}.$$

Vektor $\vec{n} = (2, 2, 7)$, kolineární s vektorem $\vec{r}\,'(2)$, je normálovým vektorem normálové roviny ke křivce γ v bodě $M = [4, 5, 11]$. Obecný tvar rovnice normálové roviny ke křivce γ v bodě $M = [4, 5, 11]$ je $\rho : 2x + 2y + 7z - 93 = 0$.

Cvičení 2.4.1: Určete rovnici tečny a normálové roviny ke křivce γ v bodě odpovídajícímu parametru $t = t_0$.

1. $\gamma(t) = (e^t \cos t,\ e^t \sin t,\ e^t)$, $t_0 = 0$.
2. $\gamma(t) = (a(t - \sin t),\ a(1 - \cos t),\ 4a \sin \frac{t}{2})$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$ ($a > 0$ je konstanta).
3. $\gamma(t) = (t \cos a \ln t,\ t \sin a \ln t,\ bt)$, $t_0 = 1$ (a, b jsou kladné konstanty).

2.5 Tečná rovina a normála plochy

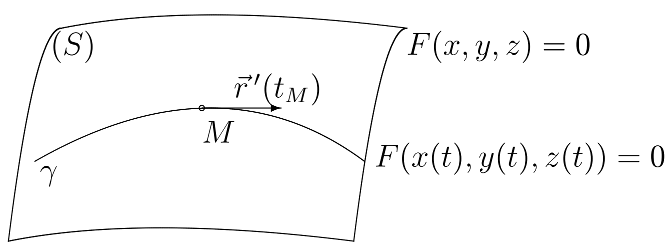


Obrázek 2.5: Tečná rovina a normála plochy.

Jak jsme ukázali v předchozích částech textu, může být funkce dvou proměnných zadána buď explicitně funkčním předpisem $z = f(x, y)$ (případně funkčními předpisy $y = f(x, z)$ resp. $x = f(y, z)$) nebo implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$. Explicitní zadání $z = f(x, y)$ funkce můžeme velmi jednoduše převést na implicitní vyjádření tvaru $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$. Na první pohled se nám může takový postup jevit jako komplikování úlohy. V dalších úvahách si ukážeme, že úloha nalezení tečné roviny a normály ke grafu funkce dvou proměnných dané implicitně rovnicí $F(x,y,z)=0$ není obtížná a má názornou geometrickou interpretaci. Podmínky existence funkce dvou proměnných dané implicitně rovnicí $F(x,y,z)=0$ známe rovněž z předchozí části textu.

Uvažujme bod $M=[x_0,y_0,z_0]$ splňující podmínku $F(M)=F(x_0,y_0,z_0)=0$. Předpokládáme existenci spojitých parciálních derivací F'_x, F'_y, F'_z v nějakém okolí $O(M)$, které nejsou v bodě M současně rovny nule. Pro zjednodušení úvah můžeme vzít podmínku $F'_z(M)=F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. Víme, že za těchto předpokladů rovnice $F(x,y,z)=0$ definuje implicitně v jistém okolí $O(x_0,y_0)$ bodu $[x_0,y_0]$ funkci $f: z=f(x,y)$ splňující podmínku $f(x_0,y_0)=z_0$. To mimo jiné znamená, že bod M je bodem grafu (S) funkce f.

Je-li $\gamma : \vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)), t\in\langle\alpha,\beta\rangle$, prostorová křivka ležící na grafu (S) a procházející bodem M, pak existuje interval $\langle\alpha_1,\beta_1\rangle\subseteq\langle\alpha,\beta\rangle$ takový, že bodu M odpovídá parametr $t_M\in\langle\alpha_1,\beta_1\rangle$ a polohový vektor $\vec{r}(t_M)$ a přitom v každém $t\in\langle\alpha_1,\beta_1\rangle$ je splněna podmínka $F(x(t),y(t),z(t))=0$.



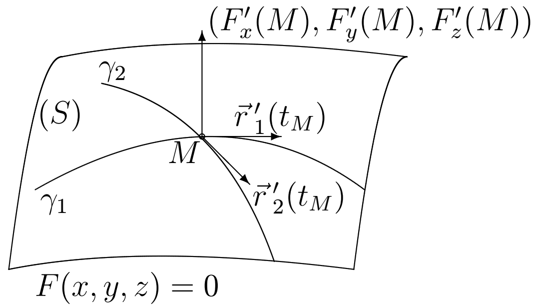
Derivováním rovnice $F(x(t),y(t),z(t))=0$ jako složené funkce podle proměnné t vychází

$$F'_x(x(t),y(t),z(t))\cdot x'(t)+F'_y(x(t),y(t),z(t))\cdot y'(t)+F'_z(x(t),y(t),z(t))\cdot z'(t)=0$$

a pro $t=t_M$ máme podmínku $F'_x(M)\cdot x'(t_M)+F'_y(M)\cdot y'(t_M)+F'_z(M)\cdot z'(t_M)=0$, kterou můžeme zapsat ve tvaru skalárního součinu

$$\big(F'_x(M),F'_y(M),F'_z(M)\big)\cdot\vec{r}\,'(t_M)=0.$$

To ale znamená, že vektor $\big(F'_x(M),F'_y(M),F'_z(M)\big)$ je kolmý k tečnému vektoru $\vec{r}\,'(t_M)$ křivky γ v bodě M grafu (S). Provedeme-li tuto úvahu pro dvě různé křivky γ_1,γ_2 procházející bodem M, dojdeme k závěru, že vektor $\big(F'_x(M),F'_y(M),F'_z(M)\big)$ je v bodě M kolmý k oběma tečným vektorům $\vec{r}\,'_1(t_M),\vec{r}\,'_2(t_M)$ křivek γ_1,γ_2.



Definice 2.5.1: *Je-li funkce* $z = f(x, y)$ *určena implicitně rovnicí* $F(x, y, z) = 0$ *a bodem* $M = [x_0, y_0, z_0]$*, pak rovinu procházející bodem* M *grafu* (S)*, která má normálový vektor* $\vec{n} = \big(F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M)\big)$ *, nazýváme* ***tečnou rovinou grafu*** (S) ***v bodě*** M*. Obecnou rovnici tečné roviny určíme například algebraickou úpravou rovnice*

$$(x - x_0) \cdot F'_x(M) + (y - y_0) \cdot F'_y(M) + (z - z_0) \cdot F'_z(M) = 0.$$

Přímku n *procházející bodem* M *grafu* (S)*, která má směrový vektor* $\vec{s} = \big(F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M)\big)$ *, nazýváme* ***normálou grafu*** (S) ***v bodě*** M*. Parametrické rovnice normály proto jsou*

$$x = x_0 + s \cdot F'_x(M), y = y_0 + s \cdot F'_y(M), z = z_0 + s \cdot F'_z(M), s \in \mathbb{R}.$$

△

Příklad 2.5.1: Určete rovnice tečné roviny a normály ke grafu funkce $f : z = x^2 + xy - \sin xy$ v bodě $[x_0, y_0] = [1, 0]$.

Řešení: Převedeme explicitní vyjádření funkce f na implicitní vyjádření $F(x, y, z) = 0$, kde $F(x, y, z) = x^2 + xy - \sin xy - z$. Najdeme bod M splňující podmínku

$$F(x_0, y_0, z_0) = F(1, 0, z_0) = 1 - 0 - \sin 0 - z_0 = 1 - z_0 = 0 \Longrightarrow z_0 = 1.$$

Pak $M = [1, 0, 1]$. Výpočtem

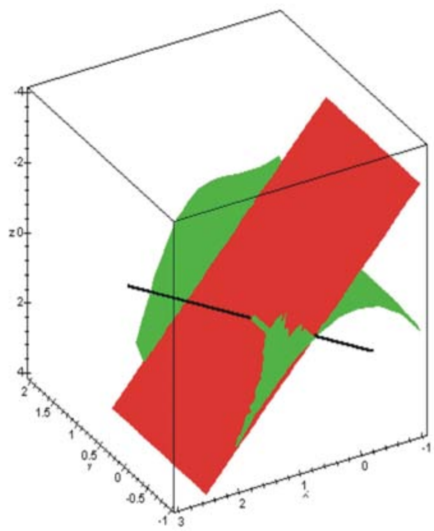
$$F'_x(x, y, z) = 2x + y - y \cos xy,\ \ F'_y(x, y, z) = x - x \cos xy, F'_z(x, y, z) = -1 \neq 0$$

zjistíme, že parciální derivace prvního řádu existují a jsou spojité v libovolném okolí bodu M a určíme vektor

$$\big(F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M)\big) = (2, 0, -1).$$

Tečná rovina ρ je určena bodem $M = [1, 0, 1]$ a normálovým vektorem $\vec{n} = (2, 0, -1)$. Její obecná rovnice je $\rho : 2x - z - 1 = 0$, a tedy tečná rovina je rovnoběžná s osou y. (Viz Obr. 2.6).

Normála n je určena bodem $M = [1, 0, 1]$ a směrovým vektorem $\vec{s} = (2, 0, -1)$. Její parametrické rovnice jsou $n : x = 1 + 2s, y = 0, z = 1 - s, s \in \mathbb{R}$ a leží proto v souřadnicové rovině $y = 0$.



Obrázek 2.6:

Cvičení 2.5.1: Funkce $z = f(x, y)$ je určena implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$ a bodem M. V bodě M určete obecný tvar rovnice tečné roviny ρ a parametrické rovnice normály ke grafu funkce f.

1. $x^3yz - 3x^2yz + x^2y^2 - 6 = 0$, $M = [1, 2, z_0]$.
2. $z = 2^{x/z} + 2^{y/z}$, $M = [2, y_0, 1]$.
3. $z - y - \ln \frac{x}{z} = 0$, $M = [1, 1, 1]$.

2.6 Skalární pole, gradient, směrová derivace skalárního pole

Skalární pole je pojem, který se používá především ve fyzikálních souvislostech. Například nás zajímají tlakové či teplotní poměry v bodech jistého fyzikálního prostředí. V matematice používáme abstrakci, která nepřihlíží ke konkrétním podobám vyšetřovaných objektů, ale naopak zdůrazňuje společné obecné rysy některých fyzikálních procesů.

2.6.1 Skalární pole

Definice 2.6.1: *Každou reálnou funkci* $F : u = F(x, y, z)$ *nazveme skalárním polem, má-li funkce* F *nějaký fyzikální význam. Každému bodu* $M = [x_0, y_0, z_0] \in D(F) \subset \mathbb{E}_3$ *je tak skalárním polem* F *přiřazena reálná funkční hodnota - skalár.*

$\triangle$

Poznámka: Analogicky je rovinné skalární pole určeno rovnicí $F : z = F(x, y)$.

Protože uvažované skalární pole je funkcí tří proměnných x, y, z a k tomu ještě uvažujeme funkční hodnotu $u = F(x, y, z)$, nemůžeme uspořádanou čtveřici $[x, y, z, u]$ zobrazit v prostoru $\mathbb{E}_3$. Použijeme postup, který známe například z turistických map, kdy nám *vrstevnice* umožňují vytvořit si představu o nadmořské výšce terénu.

2.6.2 Hladiny skalárního pole

Definice 2.6.2: ***Hladinou skalárního pole*** F *nazveme množiny těch bodů* $[x, y, z] \in D(F) \subset \mathbb{E}_3$*, pro které jsou funkční hodnoty rovny stejnému číslu* $k \in H(F) \subset \mathbb{R}$*. Hladina je tedy určena rovnicí* $F(x, y, z) = k$.

$\triangle$

Obrázek 2.7: Hladiny skalárního pole $F : u = x^2 + y^2 + z^2$.

Cvičení 2.6.1: Definujte hladinu rovinného skalárního pole.

Definuje-li rovnice $G(x, y, z) = F(x, y, z) - k = 0$ implicitně funkci dvou proměnných, například $f : z = f(x, y)$, pak je hladina $F(x, y, z) = k$ grafem funkce f. Pro skalární pole $F : u = x^2 + y^2 + z^2$ jsou postupně při konstantních funkčních hodnotách $k = 1, 4, 9, 16$ hladinami kulové plochy $x^2+y^2+z^2 = r^2 = k$ poloměrů $r = 1, 2, 3, 4$. Situaci ukazuje obrázek Obr. 2.7. Všimněme si ještě, že bod $M = [2, 0, 0] \in D(F)$ a $F(M) = 4 = r^2$ určuje hladinu skalárního pole F, ve které leží bod M.

Cvičení 2.6.2: Určete hladiny skalárních polí

1. $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2$,
2. $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2x}$,
3. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$,
4. $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x}$,
5. $g(x, y, z) = \frac{x^2+2y^2}{z}$,
6. $g(x, y, z) = \sqrt{2x^2 + 4y^2 + z^2}$,
7. $g(x, y, z) = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

2.6.3 Gradient skalárního pole

Zvolme bod $M = [x_0, y_0, z_0] \in D(F)$ skalárního pole F a určeme funkční hodnotu $F(M)$. Rovnice $F(x, y, z) = F(M)$ je rovnicí hladiny, která obsahuje bod M. Má-li funkce F v bodě M spojité parciální derivace prvního řádu, pak má spojité parciální derivace prvního řádu také funkce $G(x, y, z) = F(x, y, z) - F(M)$ a platí, že $G'_x(M) = F'_x(M), G'_y(M) = F'_y(M), G'_z(M) = F'_z(M)$. Předpokládejme, že parciální derivace $F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M)$ nejsou současně rovny nule, například $F'_z(M) \neq 0$. Pak rovnice $G(x, y, z) = F(x, y, z) - F(M) = 0$ současně definuje v okolí bodu $A = [x_0, y_0]$ implicitně nějakou funkci f dvou proměnných a vektor $(F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M))$ je normálovým vektorem tečné roviny ke grafu funkce f v bodě M. Protože má vektor $(F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M))$ v teorii skalárního pole i jiné významy, má samostatný název a nazýváme jej gradientem (funkce) skalárního pole F v bodě M.

Definice 2.6.3: *Má-li skalární pole F v otevřené množině $K \subseteq D(F) \subset \mathbb{E}_3$ spojité parciální derivace prvního řádu, pak vektor*

$$\text{grad } F(x, y, z) = \left(F'_x(X), F'_y(X), F'_z(X)\right)$$

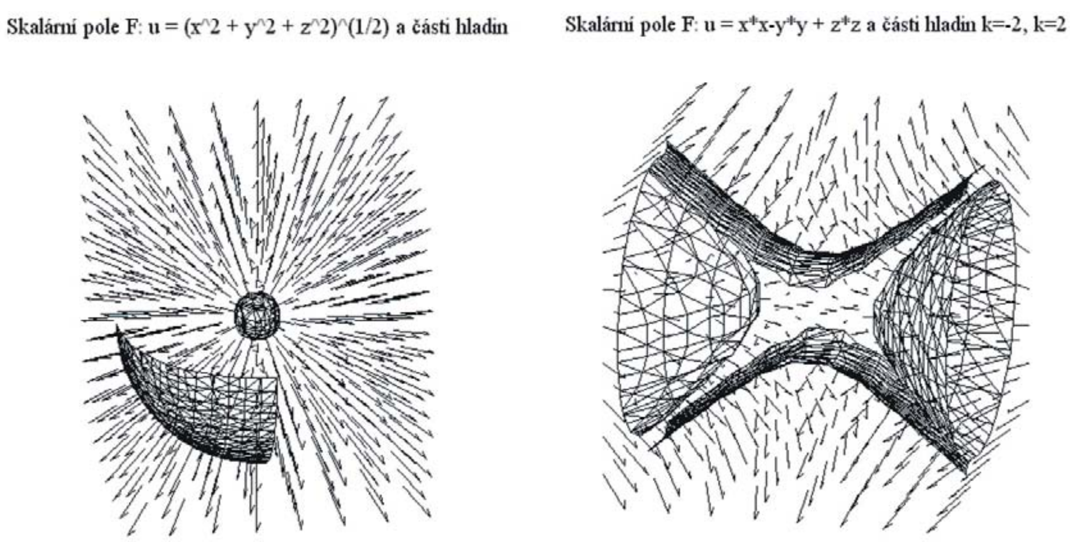
*nazýváme **gradientem skalárního pole** F v bodě $X = [x, y, z]$ oblasti K.*

$\triangle$

Poznámka: Pro gradient rovinného skalárního pole F můžeme obdobně psát

$$\text{grad } F(x, y) = \left(F'_x(x, y), F'_y(x, y)\right).$$

Každému bodu oblasti K je přiřazen vektor gradientu a jsme schopni geometricky znázornit *gradientní pole* skalárního pole F. Zobrazíme-li v gradientním poli hladinu skalárního pole (Obr. 2.8), pak vektory gradientů odpovídající bodům hladiny jsou k hladinám "kolmé".



Obrázek 2.8: Vlevo $F : u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, vpravo $F : u = x^2 - y^2 + z^2$.

Příklad 2.6.1: Určete úhel gradientů funkcí $f(x, y, z) = x^y + y^2 z$ a $g(x, y, z) = \frac{z}{x} + \cos yz$ v bodě $A = [1, 1, 0]$.

Řešení: Pro $X = [x, y, z]$ je

$$\text{grad } f(X) = \left(yx^{y-1},\ x^y \ln x + 2yz,\ y^2\right),$$

$$\operatorname{grad} g(X) = \left(-\frac{z}{x^2},\ -z\sin yz,\ \frac{1}{x} - y\sin yz\right).$$

V bodě A pak platí

$$\operatorname{grad} f(A) = (1,0,1), \quad \operatorname{grad} g(A) = (0,0,1)$$

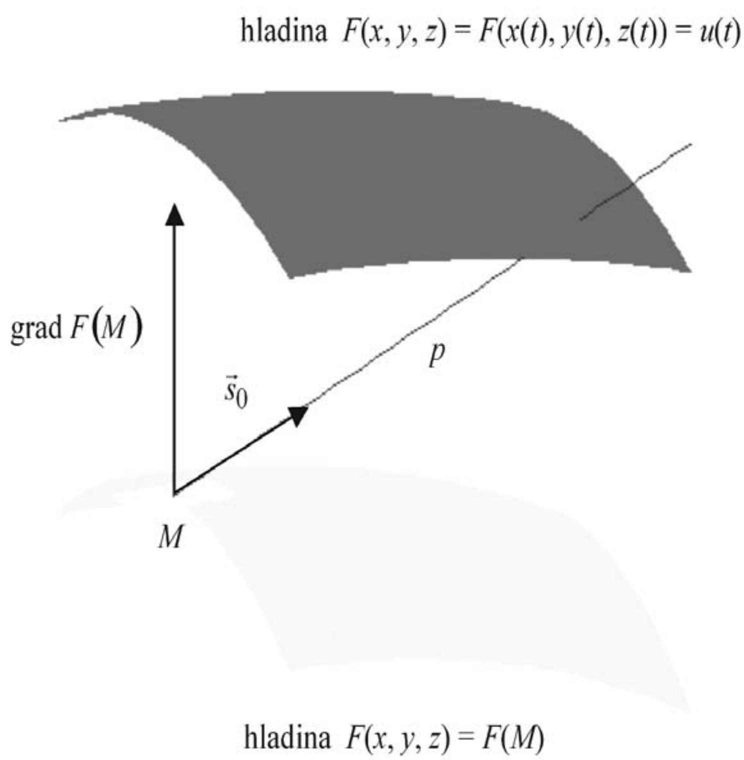
a můžeme vypočítat

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{grad} f(A)\cdot \operatorname{grad} g(A)}{||\operatorname{grad} f(A)||\cdot||\operatorname{grad} g(A)||} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Proto je hledaný úhel

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

2.6.4 Směrová derivace skalárního pole



Obrázek 2.9: Gradient a směrový vektor přímky p.

Předpokládejme, že skalární pole F má spojité parciální derivace prvního řádu v otevřené množině $K \subseteq D(F) \subset \mathbb{E}_3$. Bod $M = [x_0, y_0, z_0] \in K$ je bodem hladiny $F(x,y,z) = F(M)$ skalárního pole F. Zvolíme si (nebo je dán) směr $\vec{s} \neq \vec{o}$, který budeme chápat jako směrový vektor přímky $p = [M, \vec{s}\ ]$ procházející bodem M. Směrovým vektorem přímky p může ovšem být každý vektor kolineární s vektorem $\vec{s}$. Z důvodu jednoznačnosti úlohy, kterou chceme formulovat, vektor $\vec{s}$ normujeme. To znamená, že počítáme nadále se směrovým vektorem

$$\vec{s}_0 = (s_1, s_2, s_3) = \frac{\vec{s}}{||\vec{s}||}$$

a přímkou $p = [M, \vec{s}_0\ ]$. Vektorová rovnice přímky p je

$$p : \vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (x_0 + ts_1, y_0 + ts_2, z_0 + ts_3), t \in \mathbb{R}$$

a $\vec{r}\,'(t) = \vec{s}_0 \neq \vec{o}$ (Obr. 2.9). Vektor $\vec{r}_M = (x_0, y_0, z_0) = \vec{r}(0)$ je polohovým vektorem bodu M, který má stejné souřadnice jako bod M. Proto můžeme psát $F(M) = F(\vec{r}_M) = F(\vec{r}(0))$. Vektor $\vec{r}_X = \vec{r}_M + t\vec{s}_0$ je pro pevné t polohovým vektorem bodu X přímky p a skalární pole $u = F(x, y, z)$ nabývá v bodě X hodnoty

$$u(t) = F(x(t), y(t), z(t)) = F(x_0 + ts_1, y_0 + ts_2, z_0 + ts_3) = F(X),$$

přitom $u(0) = F(M)$. V bodech hladiny se funkční hodnoty u skalárního pole nemění a rychlost změny funkční hodnoty je proto nulová. V obecně zvoleném směru $\vec{s}_0$ přímky p je rychlost změny hodnot skalárního pole F rychlostí změny hodnot funkce $u(t)$, takže můžeme počítat

$$u'(t) = F'_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + F'_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + F'_z(x(t), y(t), z(t))z'(t) =$$

$$= \text{ grad } F(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) = \text{ grad } F(x_0 + ts_1, y_0 + ts_2, z_0 + ts_3) \cdot \vec{s}_0,$$

protože všechny potřebné derivace a parciální derivace existují. Bodu M odpovídá hodnota parametru $t = 0$, proto je rychlost změny skalárního pole F v bodě M ve směru $\vec{s}_0$ číslo

$$u'(0) = \text{ grad } F(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{s}_0 = \text{ grad } F(M) \cdot \vec{s}_0,$$

tj. skalární součin gradientu skalárního pole F v bodě M se směrovým vektorem $\vec{s}_0$. Na druhé straně můžeme tuto derivaci funkce $u(t)$ v bodě $t = 0$ vyjádřit podle definičního vztahu pro derivaci funkce jedné proměnné jako limitu

$$u'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{u(t) - u(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{F(X) - F(M)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{F(\vec{r}_X) - F(\vec{r}_M)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{F(\vec{r}_M + t\vec{s}_0) - F(\vec{r}_M)}{t}$$

a limita závisí na polohovém vektoru bodu M (tudíž na bodu M) a na směrovém vektoru $\vec{s}_0$. Můžeme proto formulovat následující definici a tvrzení potřebné pro počítání úloh.

Definice 2.6.4: *Je-li A vnitřní bod definičního oboru $D(F) \subset \mathbb{E}_3$ skalárního pole F a existuje-li konečná limita*

$$F'(M, \vec{s}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{F(\vec{r}_M + t\vec{s}_0) - F(\vec{r}_M)}{t},$$

*pak ji nazýváme **derivací skalárního pole** F **v bodě** M **ve směru** jednotkového vektoru $\vec{s}_0 \in V(\mathbb{E}_3)$.*

$\triangle$

V matematické literatuře se často směrová derivace označuje také symboly

$$\frac{\partial F(M)}{\partial \vec{s}_0}, \quad F'_{\vec{s}_0}(M).$$

Tvrzení: Má-li skalární pole F v otevřené množině $K \subseteq D(F) \subset \mathbb{E}_3$ spojité parciální derivace prvního řádu, pak lze vyjádřit směrovou derivaci $F'(M, \vec{s}_0)$ v bodě $M \in K$ vztahem

$$F'(M, \vec{s}_0) = \text{ grad } F(M) \cdot \vec{s}_0. \tag{2.5}$$

Poznámka: Uvedený vztah platí i pro rovinné skalární pole.

Cvičení 2.6.3: Řešené příklady:

Příklad 1. Určete derivaci funkce $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot \cos^2 x$ v bodě $M = [0, \frac{\pi}{2}]$ ve směru vektoru $\vec{s}_0$, kde $\vec{s} = (1, -1)$.

Řešení: Vypočítáme gradient

$$\text{grad } f(x, y) = (f'_x(x, y), f'_y(x, y)) = (2x \cos^2 x - (x^2 + y^2) \sin 2x,\ 2y \cos^2 x),$$

$$\text{grad } f(M) = (0, \pi).$$

Normováním vektoru $\vec{s}$ dostaneme vektor

$$\vec{s}_0 = \frac{\vec{s}}{||\vec{s}||} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1).$$

Hledaná směrová derivace je

$$F'(M, \vec{s}_0) = \text{ grad } F(M) \cdot \vec{s}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \pi) \cdot (1, -1) = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

Příklad 2. Určete derivaci funkce $f(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$ v bodě $A = [1,2,2]$ ve směru vektoru $\vec{s}_0$, kde $\vec{s} = \vec{AB}$ a $B = [2,2,3]$.

Řešení: Uvedeme potřebné mezivýpočty.

$$\text{grad } f(x,y,z) = \left(\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},\ -\frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2},\ -\frac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right),$$

$$\text{grad } f(A) = \frac{1}{81}(7\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}),$$

$$\vec{s} = \vec{AB} = \vec{i} + \vec{k}, \quad ||\vec{s}|| = \sqrt{2},$$

$$\frac{\partial f(A)}{\partial \vec{s}_0} = \text{ grad f(A)} \cdot \vec{s}_0 = \frac{1}{81}(7\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{k}) = \frac{\sqrt{2}}{54}.$$

Cvičení 2.6.4:

1. Vypočtěte derivaci funkce $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2y^2+4z^2}}$ v bodě $A = [2,2,1]$ ve směru jednotkového vektoru, jehož směrové úhly (tj. úhly se souřadnicovými osami) jsou postupně $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$.
(Návod: vyjádřete vektor $\vec{s}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ pomocí směrových kosinů úhlů se souřadnicovými osami.)

2. Určete derivaci funkce $f(x,y,z) = x^{yz}$ v bodě $A = [e,1,1]$ ve směru vektoru $\vec{s}_0$, kde $\vec{s} = \vec{AB}$, přičemž $B = [e,4,5]$.

2.7 Kontrolní otázky

- Kdy řekneme, že má funkce f v bodě A lokální maximum a kdy hovoříme o ostrém lokálním maximu?
- Co jsou stacionární body funkce $z = f(x, y)$? Může nastat lokální extrém i v jiných bodech než stacionárních?
- Uveďte postačující podmínky pro existenci lokálního minima funkce $z = f(x, y)$ v bodě A.
- Kdy řekneme, že je rovnicí $F(x, y) = 0$ a bodem A implicitně určená funkce $y = f(x)$? Uveďte větu o existenci takové funkce.
- Odvoďte vztah pro výpočet derivace v bodě x_0 funkce f určené implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$ a bodem $M = [x_0, y_0]$.
- Uveďte větu o existenci funkce $z = f(x, y)$ určené implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$ a bodem $M = [x_0, y_0, z_0]$. Odvoďte vztahy pro výpočet parciálních derivací takové funkce.
- Co nazýváme absolutními extrémy funkce f na uzavřené oblasti D? Co zaručuje jejich existenci?
- Co rozumíme vázanými extrémy funkce f s jednou vazební podmínkou?
- Popište postup při hledání absolutních extrémů funkce f s jednou vazební podmínkou na uzavřené oblasti.
- Co nazýváme obloukem γ ?
- Odvoďte tečný vektor k prostorové křivce.
- Uveďte rovnice tečny a normálové roviny k prostorové křivce v bodě M.
- Odvoďte normálový vektor ke grafu funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$ v bodě M. Zapište rovnice tečné roviny a normály v tomto bodě.
- Co je to hladina skalárního pole?
- Jak se určí gradient skalárního pole a jakou má vlastnost vzhledem k hladinám?
- Jak se definuje derivace skalárního pole F v bodě M ve směru vektoru $\vec{s}_0$ a jak ji lze vypočítat užitím gradientu?

2.8 Výsledky cvičení, test ke zpracování

Cvičení 2.1.1

1. $[-1,2]$ extrém nenastává, $[0,0]$ lokální minimum, $[-1,-2]$ lokální maximum, $[-\frac{5}{3},0]$ lokální maximum

2. $[0,0]$ lokální minimum, $[-4,-2]$ extrém nenastává

3. $[1,1]$ extrém nenastává

. . . .

Cvičení 2.2.1

1. $f'(0) = -\frac{1}{3}$, $f''(0) = -\frac{2}{3}$.

2. a) $y'' = -\frac{18}{(x+2y)^3}$ a současně $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$,

   b) $y'' = \frac{4(x+y)}{(1+x+y)^3}$ a současně $x + y = e^{x+y}$.

3. $2y - 3x + 4 = 0$ je tečna, $2x + 3y - 7 = 0$ je normála.

. . . .

Cvičení 2.2.2

1. $f'_x(A) = 6,\ f'_y(A) = -\frac{1}{2}$.

2. $z'_x(x,y) = \frac{z}{x+z},\ z'_y(x,y) = \frac{z^2}{y(x+z)}$.

3. $z''_{xy}(x,y) = -\frac{2x^2y^2z}{z^2-1}$.

. . . .

Cvičení 2.3.1

1. absolutní maximum v bodech $A = [0,2],\ B = [2,0]$; absolutní minimum v bodě $C = [0,0]$.

2. absolutní maximum v bodech $[0,1],\ [0,-1],\ [1,0], [-1,0]$; absolutní minimum v bodě $[0,0]$.

3. absolutní maximum v bodech $[-2,4],\ [2,4]$; absolutní minimum v bodě $[0,0]$.

. . . .

Cvičení 2.4.1

1. $p : x = 1 + t,\ y = t,\ z = 1 + t,\ t \in \mathbb{R}, \quad \rho : x + y + z - 2 = 0.$

2. $p : x = a(\frac{\pi}{2} - 1) + t,\ y = a + t,\ z = 2\sqrt{2}a + \sqrt{2}t,\ t \in \mathbb{R},$
   $\rho : x + y + \sqrt{2}z - a(4 + \frac{\pi}{2}) = 0.$

3. $p: x = 1 + t,\ y = at,\ z = b(1 + t),\ t \in \mathbb{R}, \quad \rho: x + ay + bz - (1 + b^2) = 0.$

. . . .

Cvičení 2.5.1

1. $\rho: 11x + 5y - 4z - 23 = 0$
   $p: x = 1 + 11t,\ y = 2 + 5t,\ z = -\frac{1}{2} - 4t,\ t \in \mathbb{R}.$

2. $\rho: x + y - 4z = 0$
   $p: x = 2 + t,\ y = 2 + t,\ z = 1 - 4t,\ t \in \mathbb{R}.$

3. $\rho: x + y - 2z = 0$
   $p: x = 1 + t,\ y = 1 + t,\ z = 1 - 2t,\ t \in \mathbb{R}.$

. . . .

Cvičení 2.6.2

1. elipsy o rovnicích $2x^2 + 4y^2 = C$,

2. kružnice $(x - C)^2 + y^2 = C^2$,

3. kružnice $x^2 + y^2 = 4 - C^2$, $C \in \langle 0, 2\rangle$,

4. paraboly o rovnicích $y^2 = x + C^2$,

5. eliptické paraboly $x^2 + 2y^2 = Cz$,

6. trojosé elipsoidy $2x^2 + 4y^2 + z^2 = C^2$,

7. kuželové plochy o rovnicích $z = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin C$.

. . . .

Cvičení 2.6.4

1. $\vec{s}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = (\cos\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{3}, \cos\frac{\pi}{3}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$,
   $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}_0}(A) = -\frac{1}{64}(\sqrt{2} + 4).$

2. $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}_0}(A) = \frac{7}{5}e.$

. . . .

Test 2

Jméno a příjmení: ____________________
Adresa: ____________________
E-mail: ____________________
Telefon: ____________________

1. *Určete lokální extrémy funkcí* $f : z = f(x, y)$, je-li:
   a) $z = x^3 + xy^2 - 2xy - 8x$,
   b) $z = \ln \frac{x}{6} + 2 \ln y + \ln (12 - x - y)$,
   c) $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$.
2. *Určete tečnu a normálu ke kartézskému grafu funkce dané implicitně rovnicí a bodem* A, *je-li:*
   a) $xy + \ln y - 1 = 0,\ A = [1; 1]$,
   b) $\cos xy = x + 2y,\ A = [1; 0]$.
3. *Určete tečnou rovinu a normálu v bodě* $A = [2; 2; 1]$ *plochy určené implicitně rovnicí*
$$2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} - 8 = 0.$$
4. *Určete tečnou rovinu ke kartézskému grafu funkce dané implicitně rovnicí* $3x^2 + 2y^2 + z^2 - 21 = 0$, *která je rovnoběžná s rovinou* $\rho : 6x + 4y + z = 0$.
5. *Nalezněte vázané extrémy funkcí při daných podmínkách:*
   a) $f : z = xy - x + y - 1$, podmínka $x + y = 1$,
   b) $f : z = x^2 + 2y^2$, podmínka $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$.
6. *Určete úhel gradientů skalárního pole určeného funkcí* $z(x, y) = \arcsin \frac{x}{x+y}$ *v bodech* $A = [1; 1]$, $B = [3; 4]$.
7. *Vypočtěte derivaci funkce* $f(x, y, z) = 3x^3 - 4y^3 + 2z^4$ *v bodě* $M_0 = [2; 2; 1]$ *ve směru vektoru* $\vec{s}_0$, *je-li* $\vec{s} = \overrightarrow{M_0M}$, *kde* $M = [5; 4; 6]$.

Tabulka hodnocení

1. a	1.b	1. c	2. a	2. b	3.	4.	5. a	5. b	6.	7.	Σ
4	4	4	2	2	4	4	4	4	4	4	body

Opravil:

Rejstřík

Literatura

[1] Anton H., *Calculus with Analytic Geometry*, John Wiley, 1995.

[2] Brabec J., Hrůza B., *Matematická analýza* II, SNTL, Praha 1986.

[3] Čermáková H. a kolektiv, *Sbírka příkladů z matematiky* II, VUT, FAST, CERM, Brno 2003.

[4] Došlá Z., Došlý O., *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno 1999.

[5] Drábek P., Míka S., *Matematická analýza* II, Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Plzeň 1999.

[6] Eliaš J., Horváth J., Kajan J. *Zbierka úloh z vyššej matematiky*, 3. časť, Alfa, Bratislava 1971 (2. vydanie).

[7] Ivan J., *Matematika* II, Alfa, Bratislava 1989.

[8] Karásek J., *Matematika* II, VUT, FSI, CERM, Brno 2002.

[9] Kluvánek J., Mišík L., Švec M., *Matematika* I, SVTL, Bratislava 1959.